

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI del 1° ordine

$$y' = a(x)y + g(x) \quad (E)$$

con $a, g: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue

- se $g \equiv 0$, (E) è una equazione differenziale lineare **OMOGENEA** del 1° ordine
- altrimenti, (E) è una equazione differenziale lineare **NON OMOGENEA** (o **COMPLETA**) del 1° ordine e l'equazione $y' = a(x)y$ si dice **EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA**

Teorema (Soluzione generale di $y' = a(x)y$)

Siano $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua.

Allora la soluzione generale dell'equazione omogenea $y' = a(x)y$ è data da

$$y(x) = K e^{A(x)}, \quad K \in \mathbb{R}$$

dove A è una qualunque primitiva di a .

Osservazione (Principio di sovrapposizione)

Siano $e, g_1, g_2: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue (I intervallo)

Consideriamo due equazioni differenziali lineari del 1° ordine

$$y' = a(x)y + g_1(x)$$

$$y' = a(x)y + g_2(x)$$

Siano y_1 una soluzione di $y' = a(x)y + g_1(x)$

y_2 una soluzione di $y' = a(x)y + g_2(x)$

Allora $\alpha y_1 + \beta y_2$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ costanti) è una soluzione

dell'equazione $y' = a(x)y + \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$

In particolare, se $g_1 = g_2$ allora $y_1 - y_2$ è una soluzione

dell'equazione omogenea $y' = a(x)y$.

Teorema (Soluzione generale di $y' = a(x)y + g(x)$)

Siano $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $a, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue.

Allora la soluzione generale dell'equazione non omogenea $y' = a(x)y + g(x)$ è data da

$$y(x) = K e^{A(x)} + \bar{y}(x)$$

dove A è una qualsiasi primitiva di a

$\bar{y}$ è una soluzione particolare di $y' = a(x)y + g(x)$

Osservazioni

- La soluzione generale di $y' = a(x)y + g(x)$ è data da

$$y = y_0 + \bar{y}$$

con y_0 soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y' = a(x)y$

$\bar{y}$ soluzione particolare di $y' = a(x)y + g(x)$

- Se conosciamo una soluzione particolare di $y' = a(x)y + g(x)$ allora le conosciamo tutte (e potremmo saper scrivere la soluzione generale di $y' = a(x)y$)

Vediamo adesso due metodi per determinare una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione $y' = a(x)y + g(x)$

① METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Cerchiamo una soluzione del tipo $\bar{y}(x) = K(x) e^{A(x)}$

con A primitiva di a e $K = K(x)$ funzione da determinare

② METODO DI SIMILARITÀ

Questo metodo si può applicare solo quando a è una funzione costante e il termine non omogeneo appartiene a una particolare classe di funzioni; ovvero quando siamo in uno dei seguenti casi

① $g(x) = p(x)$ dove p denota una funzione polinomiale

② $g(x) = e^{\alpha x} p(x)$

③ $g(x) = \cos(\beta x) p(x)$ oppure $g(x) = \sin(\beta x) p(x)$

④ $g(x) = e^{\alpha x} (p_1(x) \cos(\beta x) + p_2(x) \sin(\beta x))$ con p_1, p_2 funzioni polinomiali

Esempi (Metodo di variazione delle costanti)

Esempio 1: Determiniamo la soluzione generale dell'equazione

$$y' = \frac{y}{x} + x^2 \quad \text{con } x \in (0, +\infty)$$

Cominciamo con il determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$y' = \frac{y}{x} \quad a(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int a(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c = \ln x + c$$

$\uparrow$
 $x > 0$

Scegliamo $A(x) = \ln x$, allora la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = K e^{A(x)} = K e^{\ln x} = Kx \quad \text{al variare di } K \in \mathbb{R}$$

Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti, ovvero cerchiamo $K(x)$ tale che

$$\bar{y}(x) = K(x) \cdot x \quad \text{sia soluzione di } y' = \frac{y}{x} + x^2$$

$$\bar{y}'(x) = K'(x) \cdot x + K(x)$$

$$\frac{\bar{y}(x)}{x} + x^2 = K(x) + x^2$$

$$\text{Pertanto } \bar{y} \text{ è soluzione di } y' = \frac{y}{x} + x^2$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}'(x) = \frac{\bar{y}(x)}{x} + x^2$$

$$\Leftrightarrow K'(x) \cdot x + K(x) = K(x) + x^2 \quad (\Leftrightarrow) \quad K'(x) \cdot x = x^2$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = x \quad (\Leftrightarrow) \quad K(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\text{per semplicità scegliamo } c=0, \text{ dunque } \bar{y}(x) = K(x) \cdot x = \frac{x^3}{2}$$

Un conclusione, la soluzione generale di $y' = \frac{y}{x} + x^2$ è data da

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = K \cdot x + \frac{x^3}{2} \quad \text{al variare di } K \in \mathbb{R}$$

Esempio 2: Determiniamo la soluzione generale di

$$y' = 4x^3 y - e^{x^4} \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Cominciamo dall'equazione omogenea $y' = 4x^3 y$

$$\int 4x^3 dx = x^4 + c$$

Scegliamo $A(x) = x^4$, dunque $y_0(x) = K e^{x^4}$, $K \in \mathbb{R}$

Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa del tipo

$$\bar{y}(x) = K(x) e^{x^4} \quad \text{con } K \text{ funzione da determinare}$$

$$\bar{y}'(x) = K'(x) e^{x^4} + K(x) 4x^3 e^{x^4}$$

$$4x^3 \bar{y}(x) - e^{x^4} \cos(2x) = 4x^3 K(x) e^{x^4} - e^{x^4} \cos(2x)$$

Pertanto

$$\bar{y}'(x) = 4x^3 \bar{y}(x) - e^{x^4} \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow K'(x) e^{x^4} + K(x) 4x^3 e^{x^4} = 4x^3 K(x) e^{x^4} - e^{x^4} \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow K'(x) e^{x^4} = - e^{x^4} \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = - \cos(2x)$$

$$\int -\cos(2x) dx = -\frac{1}{2} \sin(2x) + c \quad \text{per semplicità scegliamo } c=0$$

$$K(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\text{Quindi } \bar{y}(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x) e^{x^4}$$

La soluzione generale dell'equazione completa è

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + \bar{y}(x) = K e^{x^4} - \frac{1}{2} \sin(2x) e^{x^4} \\ &= \left(K - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) e^{x^4} \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Esempio 3: Determiniamo la soluzione generale di

$$y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{1-4x} \quad \text{con } x \in (0, \frac{1}{4})$$

Equazione differenziale lineare del 1° ordine non omogenea con $q(x) = \frac{1}{2x}$
 $g(x) = \frac{1}{1-4x}$

Si osserva che q, g sono funzioni continue in $(0, \frac{1}{4})$

Determiniamo la soluzione generale di $y' = \frac{y}{2x}$

$$\int q(x) dx = \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + c \quad \underset{x>0}{=} \frac{1}{2} \ln x + c$$

Scegliamo $A(x) = \frac{1}{2} \ln x$, quindi

$$y_0(x) = K e^{A(x)} = K e^{\frac{1}{2} \ln x} = K e^{\ln \sqrt{x}} = K \sqrt{x}$$

Calcoliamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa

$$\bar{y}(x) = K(x) \cdot \sqrt{x} \quad \text{con } K(x) \text{ funzione da determinare}$$

Dato che

$$\bar{y}'(x) = K'(x) \cdot \sqrt{x} + K(x) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\bar{y}(x)}{2x} + \frac{1}{1-4x} = \frac{K(x)\sqrt{x}}{2x} + \frac{1}{1-4x}$$

$$y \text{ è soluzione di } y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{1-4x}$$

$$\Leftrightarrow K'(x) \cdot \sqrt{x} + K(x) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{K(x) \cdot \sqrt{x}}{2x} + \frac{1}{1-4x}$$

$$\Leftrightarrow K'(x) \sqrt{x} = \frac{1}{1-4x} \quad \Leftrightarrow K'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1-4x)}$$

Calcoliamo quindi il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-4x)} dx \quad \xrightarrow{\uparrow} \int \frac{1}{t(1-t^2)} 2t dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt = -2 \int \frac{dt}{4t^2-1}$$

$$t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$$

$$\text{in particolare } dx = 2t dt$$

Fattorizziamo il denominatore $4t^2-1 = (2t+1)(2t-1)$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} \frac{1}{4t^2-1} &= \frac{A}{2t+1} + \frac{B}{2t-1} = \frac{A(2t-1) + B(2t+1)}{(2t+1)(2t-1)} \\ &= \frac{2(A+B)t - A+B}{4t^2-1} \end{aligned}$$

risolviamo quindi il seguente sistema

$$\begin{cases} 2(A+B) = 0 \\ -A+B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{4t^2-1} dt = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{2t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{2t-1} \right) dt = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{2t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{2t-1}$$

$$= -\frac{1}{4} \ln |2t+1| + \frac{1}{4} \ln |2t-1| + c$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{x}(1-4x)} dx &= -2 \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln|2t+1| - \frac{1}{2} \ln|2t-1| + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln|2\sqrt{x}+1| - \frac{1}{2} \ln|2\sqrt{x}-1| + c \\
 &\stackrel{\nearrow}{=} \frac{1}{2} \ln(2\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2} \ln(1-2\sqrt{x}) + c \\
 &\quad x \in (0, \frac{1}{4}) \\
 &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{1-2\sqrt{x}}\right) + c
 \end{aligned}$$

Scegliamo $k(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}\right)$, dunque $\bar{y}(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} \ln\left(\frac{1+2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}\right)$
 e la soluzione generale dell'equazione completa è

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = \sqrt{x} \left(K + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}\right) \right), \quad K \in \mathbb{R}$$

Esempio 4: Determiniamo la soluzione generale di

$$y' = 2y + 3x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Osserviamo che siamo nel caso in cui $a(x) = 2$ è una costante.

Come primitive di a consideriamo $A(x) = 2x$

$y_0(x) = K e^{2x}$ è la soluzione generale di $y' = 2y$ ($K \in \mathbb{R}$)

Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti

$$\bar{y}(x) = K(x) e^{2x} \quad \text{con } K(x) \text{ da determinare}$$

$$\bar{y}'(x) = K'(x) e^{2x} + 2K(x) e^{2x}$$

$$2\bar{y}(x) + 3x = 2K(x) e^{2x} + 3x$$

Quindi $\bar{y}$ è soluzione di $y' = 2y + 3x$

$$\Leftrightarrow K'(x) e^{2x} + 2K(x) e^{2x} = 2K(x) e^{2x} + 3x$$

$$\Leftrightarrow K'(x) e^{2x} = 3x \quad \Leftrightarrow K'(x) = 3x e^{-2x}$$

Calcoliamo le primitive di $3x e^{-2x}$

$$\begin{aligned}
 \int 3x e^{-2x} dx &= 3 \int \underset{\substack{\uparrow \uparrow \\ g \quad f'}}{x e^{-2x}} dx \stackrel{\uparrow}{=} -\frac{3}{2} x e^{-2x} - \left(-\frac{3}{2}\right) \int e^{-2x} dx \\
 &\quad \text{Integriamo per parti}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3}{2} x e^{-2x} + \frac{3}{2} \int e^{-2x} dx \\
&= -\frac{3}{2} x e^{-2x} - \frac{3}{4} e^{-2x} + C \quad \text{scogliamo } C=0
\end{aligned}$$

$$K(x) = -\frac{3}{4} e^{-2x} (1+2x)$$

$$\bar{y}(x) = K(x) e^{2x} = -\frac{3}{4} (1+2x) = -\frac{3}{2} x - \frac{3}{4}$$

la soluzione generale è $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = K e^{2x} - \frac{3}{2} x - \frac{3}{4}$, $K \in \mathbb{R}$

Metodo alternativo: poiché $f(x) = 3x$ è un polinomio di grado 1, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(x) = Ax+B$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare.

$$\bar{y}(x) = Ax+B, \quad \bar{y}'(x) = A$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y' = 2y + 3x \Leftrightarrow A = 2(Ax+B) + 3x$$

$$\Leftrightarrow A = 2Ax + 2B + 3x$$

$$\Leftrightarrow (2A+3)x + (2B-A) = 0$$

l'identità è valida solo se e soltanto se

$$\begin{cases} 2A+3=0 \\ 2B-A=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = \frac{A}{2} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

ovvero $\bar{y}(x) = Ax+B = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$ è la stessa soluzione trovata con il metodo di variazione delle costanti

Teorema (METODO di SIMILARITA')

Consideriamo un'equazione differenziale lineare del 1° ordine del tipo

$$y' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a costante non nulla}}}{ay} + g(x) \quad \text{con } a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(se $a=0$ stiamo semplicemente cercando l'insieme delle primitive di g)

① Se $g(x)$ è una funzione polinomiale di grado n , allora

$\exists \bar{y}$ funzione polinomiale di grado $\leq n$ soluzione di $y' = ay + g(x)$

② Se $g(x) = e^{\alpha x} p(x)$ con $p(x)$ funzione polinomiale di grado n , allora $\exists \bar{y}(x)$ funzione polinomiale di grado $\leq n$ tale che

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} q(x) & \text{se } \alpha \neq a \\ e^{\alpha x} \cdot x \cdot q(x) & \text{se } \alpha = a \end{cases} \text{ è soluzione di } y' = ay + g(x)$$

③ Se $g(x) = \cos(\beta x) p(x)$ oppure $g(x) = \sin(\beta x) p(x)$
 con $p(x)$ funzione polinomiale di grado m , allora $\exists q_1(x), q_2(x)$
 funzioni polinomiali di grado $\leq m$ tali che

$$\bar{y}(x) = q_1(x) \cos(\beta x) + q_2(x) \sin(\beta x) \quad \text{è soluzione di } y' = ay + g(x)$$

④ Se $g(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) p_1(x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x) p_2(x)$

con $\beta \neq 0$ e $p_1(x)$ funzione polinomiale di grado m
 $p_2(x)$ funzione polinomiale di grado m ,

allora $\exists q_1(x), q_2(x)$ funzioni polinomiali di grado $\leq \max\{m, m\}$ tali che

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) q_1(x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x) q_2(x)$$

è soluzione di $y' = ay + g(x)$

Esempi (Metodo di similarità)

Esempio 1: $y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$

così ①

Equazione differenziale lineare non omogenea

$$a(x) = 5 \quad (\text{costante})$$

$$g(x) = 10x^2 - \frac{9}{5} \quad (\text{polinomio di } 2^\circ \text{ grado})$$

$y_0(x) = Ke^{5x}$, $K \in \mathbb{R}$ soluzioni generali dell'equazione $y' = 5y$

Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa con il
 metodo di similarità: poiché $g(x)$ è un polinomio di secondo grado

sappiamo che esiste $\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$ polinomio di grado ≤ 2

soluzione di $y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$. Determiniamo le costanti $A, B, C \in \mathbb{R}$
 affinché ciò accada

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$

$\bar{y}$ è soluzione di $y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$

$$\Leftrightarrow 2Ax + B = 5(Ax^2 + Bx + C) + 10x^2 - \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow (5A + 10)x^2 + (5B - 2A)x + 5C - B - \frac{9}{5} = 0$$

Per il principio di identità tra polinomi, l'identità precedente può valere
 se e soltanto se A, B, C soddisfanno il seguente sistema

$$\begin{cases} 5A + 10 = 0 \\ 5B - 2A = 0 \\ 5C - B - \frac{9}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = \frac{2}{5}A = -\frac{4}{5} \\ C = \frac{1}{5}B + \frac{9}{25} = -\frac{4}{25} + \frac{9}{25} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

dunque $\bar{y}(x) = -2x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$

la soluzione generale dell'equazione completa è

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = Ke^{5x} - 2x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Esempio 2 : $y' = 4y + 2\cos x$ caso ③

$$q(x) = 4 \quad g(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio di grado 0}}}{2 \cos x}$$

$y_0(x) = Ke^{4x}$ soluzione generale di $y' = 4y$ ($K \in \mathbb{R}$)

Poi dato $g(x)$ è il prodotto di $\cos x$ per un polinomio di grado 0
per il metodo di similitudine supponiamo che l'equazione completa ammetta
una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(x) = A \cos x + B \sin x \quad \left(\begin{array}{l} \text{nelle notazioni dell'enunciato} \\ \varphi_1(x) = A \\ \varphi_2(x) = B \end{array} \text{ sono i polinomi di grado } \leq 0 \right)$$

$$\bar{y}(x) = A \cos x + B \sin x \quad \bar{y}'(x) = -A \sin x + B \cos x$$

$\bar{y}$ è soluzione di $y' = 4y + 2\cos x$

$$\Leftrightarrow -A \sin x + B \cos x = 4A \cos x + 4B \sin x + 2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow (4A - B + 2) \cos x + (4B + A) \sin x = 0$$

L'identità precedente vale se e soltanto se

$$\begin{cases} 4A - B + 2 = 0 \\ 4B + A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16B - B + 2 = 0 \\ A = -4B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{8}{17} \\ B = \frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{8}{17} \cos x + \frac{2}{17} \sin x$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = Ke^{4x} - \frac{8}{17} \cos x + \frac{2}{17} \sin x, \quad K \in \mathbb{R}$$

Esempio 3 : $y' + 3y = xe^{-x}$

caso ② $\alpha \neq 0$

In forma normale $y' = -3y + xe^{-x}$

$a(x) = -3$ (costante)

$g(x) = xe^{-x}$ (polinomio di grado 1 $\times e^{-x}$)

$y_0(x) = Ke^{-3x}$ soluzione generale di $y' = -3y$ ($K \in \mathbb{R}$)

osserviamo che $-1 \neq -3$, pertanto per il metodo di similitudine
l'equazione completa ammette una soluzione del tipo

$\bar{y}(x) = (Ax+B)e^{-x}$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare
(nelle notazioni dell'enunciato $q(x) = Ax+B$)

$\bar{y}'(x) = -(Ax+B)e^{-x} + Ae^{-x} = (-Ax+A-B)e^{-x}$

$\bar{y}$ è soluzione di $y' = -3y + xe^{-x}$

$\Leftrightarrow (-Ax+A-B)e^{-x} = -3(Ax+B)e^{-x} + xe^{-x}$

$\Leftrightarrow -Ax+A-B = -3Ax-3B+x$

$\Leftrightarrow (1-2A)x - A-2B = 0$

per il principio di identità tra polinomi l'identità precedente è verificata
se e soltanto se

$\begin{cases} 1-2A=0 \\ -A-2B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2}A=-\frac{1}{4} \end{cases}$

$\bar{y}(x) = (\frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-x}$

$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = Ke^{-3x} + (\frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-x}$ ($K \in \mathbb{R}$)

Esempio 4 : $y' = -3y + e^{-3x}$

caso ② $\alpha = 0$

$a(x) = -3$ (costante), $g(x) = e^{-3x} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio di grado 0}}}{1} \cdot e^{-3x}$

$y_0(x) = Ke^{-3x}$ soluzione generale di $y' = -3y$ ($K \in \mathbb{R}$)

Per il metodo di similitudine sappiamo che l'equazione completa ammette

una soluzione del tipo $\bar{y}(x) = Ax e^{-3x}$ ($q(x) = A$ polinomio di grado ≤ 0
nelle notazioni dell'enunciato)

$$\bar{y}'(x) = (A - 3Ax) e^{-3x}$$

$\bar{y}$ è soluzione di $y' = -3y + e^{-3x}$

$$\Leftrightarrow (A - 3Ax) e^{-3x} = -3Ax e^{-3x} + e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow A e^{-3x} = e^{-3x} \quad \Leftrightarrow A = 1$$

$$\bar{y}(x) = x e^{-3x}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = K e^{-3x} + x e^{-3x} = (K+x) e^{-3x}, \quad K \in \mathbb{R}$$

NB: se ERRONEAMENTE avessimo cercato una soluzione della forma

$$\bar{y} = A e^{-3x} \quad (\text{senza dimenticandoci del pedice } a=x \text{ dobbiamo includere il fattore } x)$$

saremmo giunti ad una condizione impossibile, infatti

$$\bar{y} = A e^{-3x} \text{ è soluzione di } y' = -3y + e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow -3A e^{-3x} = -3A e^{-3x} + e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow 0 = e^{-3x} \text{ impossibile}$$

$$\text{Esempio 5: } y' = -y + e^{2x} (x \cos x + \sin x) + e^{-x} \sin(2x)$$

$$a(x) = -1 \quad (\text{costante})$$

$$g(x) = e^{2x} (x \cos x + \sin x) + e^{-x} \sin(2x)$$

$$y_0(x) = K e^{-x} \text{ soluzione generale di } y' = -y \quad (K \in \mathbb{R})$$

Possiamo applicare il metodo di similitudine direttamente a questa $g(x)$?

No, g non rientra nella classe di funzioni considerate nell'enunciato del teorema. Tuttavia osserviamo che

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

$$\text{con } g_1(x) = e^{2x} (x \cos x + \sin x)$$

$$g_2(x) = e^{-x} \sin(2x)$$

e g_1, g_2 rientrano entrambe nelle classi di funzioni per

cui possiamo applicare il metodo di similitudine

Se $\bar{y}_1$ è una soluzione particolare dell'equazione $y' = -y + g_1(x)$
(ottenuta con il metodo di similitudine)

$\bar{y}_2$ è una soluzione particolare dell'equazione $y' = -y + g_2(x)$
(ottenuta con il metodo di similitudine)

allora, per il PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE, $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$ è una soluzione particolare di $y' = -y + g_1(x) + g_2(x)$
 $= -y + g(x)$

Applichiamo il metodo di similitudine per calcolare una soluzione particolare di $y' = -y + g_1(x)$

$$g_1(x) = e^{2x} (x \cos x + \sin x)$$

caso 4)

$$\bar{y}_1(x) = e^{2x} ((Ax+B) \cos x + (Cx+D) \sin x)$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ da determinare

nella notazione dell'enunciato
del Teorema

$p_1(x) = x$ polinomio di grado 1

$p_2(x) = 1$ polinomio di grado 0

$q_1(x) = Ax+B$ polinomi di grado

$q_2(x) = Cx+D \leq \max\{1,0\} = 1$

Per calcolare la derivata di $\bar{y}_1$ applichiamo 3 volte la regola di Leibniz

$$\begin{aligned} \bar{y}_1'(x) &= 2e^{2x} ((Ax+B) \cos x + (Cx+D) \sin x) \\ &\quad + e^{2x} (A \cos x - (Ax+B) \sin x + C \sin x + (Cx+D) \cos x) \\ &= e^{2x} ([2Ax+2B+A+Cx+D] \cos x + [2Cx+2D-Ax-B+C] \sin x) \\ &= e^{2x} \{ [(2A+C)x + A+2B+D] \cos x + [(-A+2C)x - B+C+2D] \sin x \} \end{aligned}$$

$\bar{y}_1$ è soluzione di $y' = -y + g_1(x)$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_1' = -\bar{y}_1 + e^{2x} (x \cos x + \sin x)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{2x} \{ [(2A+C)x + A+2B+D] \cos x + [(-A+2C)x - B+C+2D] \sin x \} \\ = e^{2x} \{ [(-A+1)x - B] \cos x + [-Cx + (-D+1)] \sin x \} \end{aligned}$$

l'identità precedente è verificata se imponiamo che $A, B, C, D \in \mathbb{R}$
verifichiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} 2A+C = -A+1 \\ A+2B+D = -B \\ -A+2C = -C \\ -B+C+2D = -D+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+C = 1 \\ A+3B+D = 0 \\ -A+3C = 0 \\ -B+C+3D = 1 \end{cases}$$

dalla terza equazione ricaviamo $A=3C$ e sostituendo nella prima abbiamo

$$10C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{10} \text{ e } A = \frac{3}{10}$$

ricaviamo ora B e D dalle seconde e quarta equazione (sostituendo i valori di A e C)

$$\begin{cases} 3B+D = -\frac{3}{10} \\ -B+3D = \frac{9}{10} \end{cases} \Rightarrow B = 3D - \frac{9}{10} \Rightarrow 3(3D - \frac{9}{10}) + D = -\frac{3}{10} \Rightarrow 10D = \frac{24}{10} \Rightarrow D = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

$$B = 3D - \frac{9}{10} = \frac{18}{25} - \frac{9}{10} = \frac{72-90}{100} = -\frac{18}{100} = -\frac{9}{50}$$

Ricapitolando

$$A = \frac{3}{10}, B = -\frac{9}{50}, C = \frac{1}{10}, D = \frac{6}{25}$$

$$\bar{y}_1(x) = e^{2x} \left(\left(\frac{3}{10}x - \frac{9}{10} \right) \cos x + \left(\frac{x}{10} + \frac{6}{25} \right) \sin x \right)$$

Applichiamo ora il metodo di similarità all'equazione $y' = -y + g_2(x)$

$$g_2(x) = e^{-x} \sin(2x)$$

coso (4)

$$\bar{y}_2(x) = e^{-x} (E \cos(2x) + F \sin(2x))$$

NB: anche se siamo nel caso $\alpha = \alpha = -1$ non dobbiamo aggiungere un ulteriore fattore x perché c'è il termine sinusoidale

nella notazione dell'enunciato del Teorema

$$\begin{array}{ll} P_1(x) = 0 & \text{polinomio di grado 0} \\ P_2(x) = 1 & \text{polinomio di grado 0} \\ Q_1(x) = E & \text{polinomi di grado} \\ Q_2(x) = F & \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_2'(x) &= -e^{-x} (E \cos(2x) + F \sin(2x)) + e^{-x} (-2E \sin(2x) + 2F \cos(2x)) \\ &= e^{-x} ((-E+2F) \cos(2x) - (2E+F) \sin(2x)) \end{aligned}$$

$\bar{y}_2$ è soluzione di $y' = -y + g_2(x)$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_2' = -\bar{y}_2 + e^{-x} \sin(2x)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}((-E+2F) \cos(2x) - (2E+F) \sin(2x)) = e^{-x}(-E \cos(2x) + (-F+1) \sin(2x))$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}(-2F \cos(2x) + (2E+1) \sin(2x)) = 0$$

l'identità precedente è verificata se

$$\begin{cases} 2E+1=0 \\ -2F=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E=-\frac{1}{2} \\ F=0 \end{cases}$$

$$\bar{y}_2(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos(2x)$$

la soluzione generale di $y' = -y + g(x)$ è quindi:

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$$

$$= K e^{-x} + e^{2x} \left(\frac{3}{10} x - \frac{9}{10} \right) \cos x + e^{2x} \left(\frac{x}{10} + \frac{6}{25} \right) \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos(2x)$$

($K \in \mathbb{R}$)